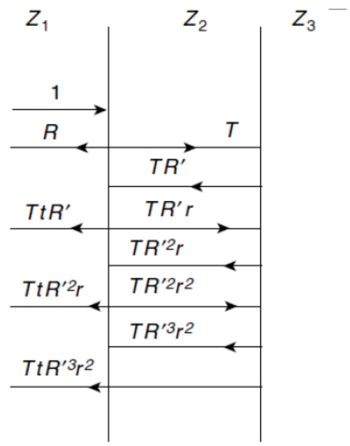
เฉลย homework #5

1. ในการแก้ปัญหาข้อนี้ต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับ multiple reflection



จากรูปจะเห็นว่าเกิดการสะท้อนกลับไปมาภายในตัวกลางที่สอง เราสามารถเขียนผลรวมของการสะท้อนทั้งหมดออกมาได้เป็น

$$R_{total} = R + tTR'e^{-2i\beta} + tTR'^2re^{-4i\beta} + tTR'^3r^2e^{-6i\beta} + \cdots$$

$$R_{total} = R + tTR'e^{-2i\beta}\left(1 + R're^{-2i\beta} + R'^2r^2e^{-4i\beta} + R'^3r^3e^{-6i\beta} + \cdots\right) \quad (1)$$

โดยอาศัย $1 + n + n^2 + n^3 + \cdots = \frac{1}{1-n}$

ดังนั้นสมการ *(1)* เขียนใหม่ได้เป็น

$$R_{total} = R + tTR'e^{-2i\beta}\left(\frac{1}{1-R're^{-2i\beta}}\right) \quad (2)$$

โดยที่ *R* คือ *reflection coefficient* ที่ *interface 1-2* เมื่อคลื่นตกกระทบจาก *1* ไป *2*

r คือ *reflection coefficient* ที่ *interface 1-2* เมื่อคลื่นตกกระทบจาก *2* ไป *1*

R′ คือ *reflection coefficient* ที่ *interface 2-3* เมื่อคลื่นตกกระทบจาก *2* ไป *3*

T คือ *transmission coefficient* ที่ *interface 1-2* เมื่อคลื่นเดินทางจาก *2* ไป *1*

t คือ *transmission coefficient* ที่ *interface 1-2* เมื่อคลื่นเดินทางจาก *1* ไป *2*

และ 2β คือ ความต่างเฟสระหว่างคลื่นสะท้อนที่อยู่ติดกัน (สำหรับคลื่นเดินทางไปและกลับ)

ถ้าเรากำหนดให้ $Z_1 > Z_2 > Z_3$ ความต่างเฟสที่เกิดขึ้นจะมาจากความหนาของตัวกลาง Z_2 เพียงอย่างเดียว และเนื่องจากโจทย์กำหนดให้ความหนาของตัวกลาง Z_2 เป็น $\frac{\lambda}{4}$ ดังนั้นเมื่อคิดเป็นระยะทางทั้งไปและกลับจะเป็นระยะทางเท่ากับ

$\frac{\lambda}{2}$ ซึ่งมีค่าเทียบเท่ากับเฟส π ซึ่งก็คือค่าความต่างเฟสของคลื่นสะท้อนที่อยู่ติดกันนั่นเอง ส่งผลให้ $2\beta = \pi$ ดังนั้นสมการที่ *(2)* เขียนใหม่ได้เป็น

$$R_{total} = R - tTR'\left(\frac{1}{1+R'r}\right) \qquad (3)$$

ข้อสังเกต

เราอาจจะแทน $2\beta = \pi$ *ก่อนในสมการที่* (1) *ซึ่งจะทำให้ได้*

$$R_{total} = R - tTR'\left(1 - R'r + R'^2r^2 - R'^3r^3 + \cdots\right)$$

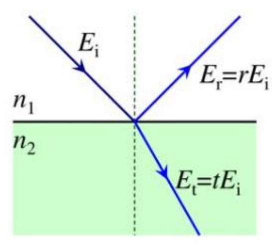
โดยอาศัย $1 - n + n^2 - n^3 + \cdots = \frac{1}{1+n}$, R_{total} เขียนได้เป็น

$$R_{total} = R - tTR'\left(\frac{1}{1+R'r}\right) \qquad \text{เช่นกัน}$$

นอกจากนี้เราต้องอาศัยความรู้จาก *Stokes relation* เพื่อนำมาเปลี่ยนแปลงตัวแปรในสมการที่ *(3)* ซึ่งประกอบด้วย *r, t* และ *T* ให้อยู่ในเทอม *R* และ *R'* โดยมีรายละเอียดดังนี้

(อ้างอิงจาก *https://slideplayer.com/slide/*15061276/)

เริ่มต้นการพิจารณาจากรูปที่ *1* แสดงถึง การเดินของคลื่นตกกระทบแอมพลิจูด E_i จากตัวกลางที่ *1* ไปยังตัวกลางที่ *2* โดยเกิดการสะท้อน ได้คลื่นที่มีแอมพลิจูด rE_i และการหักเหที่มีแอมพลิจูด tE_i

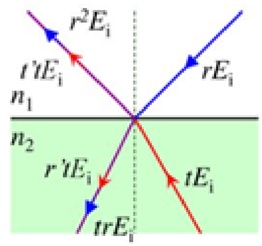


รูปที่ *1* *r* และ *t* สัมประสิทธิ์ของการสะท้อนและการหักเห ตามลำดับ สำหรับการเดินทางของคลื่นจากตัวกลางที่ *1* ไปยังตัวกลางที่ *2*

ถ้าเราพิจารณารูปข้างต้น เมื่อคลื่นแสงเดินทางจากตัวกลางที่ *1* มายังตัวกลางที่ *2* โดยให้ตกกระทบทางด้านซ้ายมือของเส้นตั้งฉาก (เส้นประ) เราจะพบว่ามีชุดของมุมตกกระทบ มุมสะท้อนและมุมหักที่สัมพันธ์กัน

พิจารณาในทางกลับกัน โดยในกรณีแรกเริ่มต้นจากการพิจารณาคลื่นสะท้อนที่มีแอมพลิจูด rE_i เดินทางย้อนกลับจะพบว่าตามหลักการสะท้อนและการหักเห จะเกิดคลื่นสะท้อนที่มีแอมพลิจูด r^2E_i และคลื่นหักเหที่มีแอมพลิจูด trE_i ในทำนองเดียวกันสำหรับกรณีที่สอง พิจารณาการเดินทางย้อนกลับของคลื่นหักเหที่มีแอมพลิจูด tE_i เมื่อตกกระทบที่ผิวรอยต่อ

ส่งผลให้เกิดคลื่นสะท้อนที่มีแอมพลิจูด *r′tEᵢ* และคลื่นหักเหที่มีแอมพลิจูด *t′tEᵢ* ดังแสดงในรูปที่ *2* เมื่อ *r′* และ *t′* คือสัมประสิทธิ์ของการสะท้อนและการหักเห ตามลำดับ สำหรับการเดินทางของคลื่นจากตัวกลางที่ *2* ไปยังตัวกลางที่ *1*



รูปที่ *2*

รูปที่ *2* แสดงให้เห็นว่าแนวทางเดินของคลื่นในแนวทางที่ย้อนกลับแนวทางเดิม ซึ่งหลักการนี้เรียกว่า ***principle of ray reversibility***

จากรูปจะเห็นว่าแนวแสงสามารถย้อนกลับเส้นทางเดิมได้ ซึ่งเป็นจริงไม่ว่าจะเกิดการสะท้อนหรือหักเหกี่ครั้งก็ตาม เหตุการณ์นี้แสดงถึงหลักการที่เรียกว่า ***principle of ray reversibility***

เนื่องจากเหตุการณ์เริ่มต้นก่อนการคิดการเดินทางย้อนกลับของคลื่นเป็นไปตามรูปที่ *1* ดังนั้นผลรวมของแอมพลิจูดของคลื่นใน *quadrant* ที่ *2* ควรมีค่าเป็น

$$t'tE_i + r^2E_i = E_i \qquad (4)$$

และผลรวมของแอมพลิจูดของคลื่นใน *quadrant* ที่ *3* ควรมีค่าเป็น

$$r'tE_i + trE_i = 0 \qquad (5)$$

ผลจากสมการที่ *(4)* และ *(5)* นำไปสู่ข้อสรุปว่า

$$t't + r^2 = 1 \qquad (6)$$

และ

$$r = -r' \qquad (7)$$

สมการที่ (*6*) และ (*7*) ถูกเรียกว่า ***Stokes relation*** ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การสะท้อนและการหักเห และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับการตกกระทบของแสงจากคนละด้านของผิวรอยต่อ ตามลำดับ

เราจะใช้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ *(6)* และ *(7)* มาแปลงสมการที่ *(3)* ให้อยู่ในเทอมของ *R* และ *R′* เท่านั้น

พิจารณาสมการการที่ *(3)*

$$R_{total} = R - tTR'\left(\frac{1}{1+R'r}\right)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ *(3)* กับ *Stokes relation* เราจะได้ว่า

$$r = -R \qquad (8)$$

และ

$$tT = 1 - R^2 \qquad (9)$$

แทนสมการที่ *(8)* และ *(9)* ลงในสมการที่ *(3)* และกำหนดให้ $R_{total} = 0$ ดังนั้นเราจะได้

$$R - (1-R^2)R'\left(\frac{1}{1-RR'}\right) = 0$$

$$R = R' \qquad (10)$$ ตามที่โจทย์ระบุ

เนื่องจาก $R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ และ $R' = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$ ดังนั้นตามความสัมพันธ์ในสมการที่ *(10)* เราพบว่า

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} \qquad (11)$$ #

2. โจทย์กำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง *impedance Z* กับ *refractive index* ดังนี้Type equation here.

$$Z = \frac{1}{n}$$

ปัญหาข้อนี้เกี่ยวข้องกับการแก้ไข *mismatching* ระหว่างตัวกลางที่มีค่า *impedance* ต่างกัน

จากข้อแล้วเราทราบว่า เพื่อที่จะลดปัญหา *mismatching* ด้วยการลดการสะท้อนของคลื่นที่ความยาวคลื่นค่าหนึ่ง ตัวกลางที่นำมาแทรกระหว่างสองตัวกลางเดิมต้องมีความหนาเป็น $\lambda/4$ โดยที่ λ คือความยาวคลื่นในตัวกลางที่นำมาแทรก และ *impedance* ของตัวกลางที่นำมาแทรกต้องมีค่าเป็น $\sqrt{Z_1 Z_3}$ เมื่อ Z_1 และ Z_3 เป็น *impedance* ของคู่ตัวกลางเดิมก่อนที่จะการแก้ *mismatching*

สถานการณ์ที่โจทย์ให้มาคือแสงเดินทางจากอากาศผ่านเลนส์ดังนั้น วัสดุที่นำมาเคลือบเลนส์เพื่อลดการสะท้อนที่ความยาวคลื่น 5.5×10^{-7} *m* ต้องมีความหนา $\frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{n_2}$ เมื่อ λ_0 คือความยาวคลื่นใน *free space* และ n_2 คือค่าดรรชนีหักเหของวัสดุที่นำมาเคลือบซึ่งหาได้จาก

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

$$\frac{1}{n_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1}\frac{1}{n_3}} = \sqrt{\frac{1}{(1)}\frac{1}{(1.5)}} = \frac{1}{\sqrt{1.5}}$$

$$\therefore n_2 = 1.22$$

ซึ่งทำให้เราได้ความหนาของวัสดุที่นำมาเคลือบเป็น $\frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{n_2} = \frac{1}{4}\frac{(5.5\times10^{-7})}{(1.22)} = 1.12 \times 10^{-7} m$ #